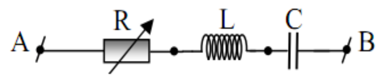
PHẦN TỔNG QUÁT VỀ CỰC TRỊ TRONG MẠCH ĐIỆN RLC

Chủ đề 3: Bài toán cho R thay đổi.

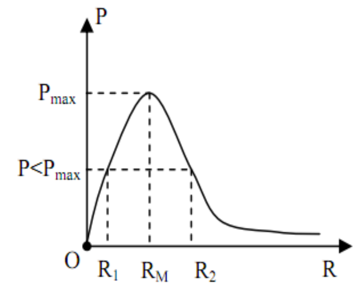
- *Trường hợp cuộn dây không có điện trở.* [Thuần cảm]
  - *Xác định R để công suất $\mathscr{P}$ đạt giá trị cực đại. Tính giá trị cực đại đó.*

+ Khi L,C,ω không đổi thì mối liên hệ giữa Z_L và Z_C không thay đổi nên sự thay đổi của R **không** gây ra **hiện tượng cộng hưởng**

+ Tìm công suất tiêu thụ cực đại của đoạn mạch:



Ta có $\mathscr{P} = RI^2 = R\dfrac{U^2}{R^2 + (Z_L - Z_c)^2} = \dfrac{U^2}{R + \dfrac{(Z_L - Z_C)^2}{R}}$,



Do U = const. nên để $\mathscr{P} = \mathscr{P}_{max}$ thì ($R + \dfrac{(Z_L - Z_C)^2}{R}$) đạt giá trị min

Áp dụng bất dẳng thức Cosi cho 2 số dương R và $(Z_L - Z_C)^2$ ta được:

$$R + \frac{(Z_L - Z_C)^2}{R} \geq 2\sqrt{R.\frac{(Z_L - Z_C)^2}{R}} = 2|Z_L - Z_C|$$

Vậy $\left(R + \dfrac{(Z_L - Z_C)^2}{R}\right)_{min}$ là $2|Z_L - Z_C|$ lúc đó dấu "=" của bất đẳng thức xảy ra nên ta có

$$\mathbf{R = \frac{(Z_L - Z_C)^2}{R} \Rightarrow R = |Z_L - Z_C|} \text{ và } \mathscr{P}_{max} = \mathbf{\frac{U^2}{2R} = \frac{U^2}{2|Z_L - Z_C|}}$$ Lúc đó: **cosφ = $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; tan φ = 1 và φ = π/4 (rad).**

  - ***Cho R biến thiên từ R_1 → R_2. Xác định R để U_{Rmin}, U_{Rmax}. Tính các giá trị tương ứng.***

+ Công thức tính hiệu điện thế giữa hai đầu điện trở R: $U_R = I.R = \dfrac{U}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}}.R = \dfrac{U}{\sqrt{1 + \dfrac{(Z_L - Z_C)^2}{R^2}}}$.

- U_{Rmax} khi $R = R_{max} = R_2$: $U_{Rmax} = \dfrac{U}{\sqrt{1 + \dfrac{(Z_L - Z_C)^2}{R_2^2}}}$
- U_{Rmin} khi $R = R_{min} = R_1$: $U_{Rmin} = \dfrac{U}{\sqrt{1 + \dfrac{(Z_L - Z_C)^2}{R_1^2}}}$

  - ***Cho R biến thiên từ R_1 → R_2. Xác định R để U_{RLmax}, U_{RCmax}. Tính giá trị cực đại đó.***

- Ta có $U_{RL} = I.Z_{RL} = \dfrac{U}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}}.\sqrt{R^2 + Z_L^2} = \dfrac{U}{\sqrt{1 + \dfrac{Z_C^2 - 2Z_L.Z_C}{R^2 + Z_L^2}}}$.

- Để U_{RLmax} thì $R = R_{max} = R_2$. - Giải tương tự cho U_{RC}.

  - ***Cho R biến thiên từ R_1 → R_2. Xác định R để $\mathscr{P}_{Rmin}$, $\mathscr{P}_{Rmax}$. Tính các giá trị tương ứng.***

Ta có $\mathscr{P} = RI^2 = R\dfrac{U^2}{R^2 + (Z_L - Z_c)^2} = \dfrac{U^2}{R + \dfrac{(Z_L - Z_C)^2}{R}}$.

Đối với dạng bài tập này, ta phải xét trường hợp $R_0 = |Z_L - Z_C|$ và khoảng từ R_1 → R_2.

- Nếu R_0 nằm trong khoảng từ R_1 → R_2 thì $\mathscr{P}_{Rmax} = \dfrac{U^2}{2R_0}$; Để tính $\mathscr{P}_{Rmin}$ ta tính từng trường hợp rồi so sánh hai kết quả để tìm ra giá trị nhỏ nhất.

○ ***Xác định giá trị của tần số f (hoặc L, hoặc C) để U_{LR}, U_{RC} không đổi khi thay đổi R***

Ta có: $U_{LR} = I.Z_{LR} = \dfrac{U}{\sqrt{R^2+(Z_L-Z_C)^2}}.\sqrt{R^2+Z_L^2} = \dfrac{U}{\sqrt{\dfrac{R^2+(Z_L-Z_C)^2}{R^2+Z_L^2}}} = \dfrac{U}{\sqrt{1+\dfrac{Z_C(Z_C-2Z_L)}{R^2+Z_L^2}}}$

Để U_{LR} không thay đổi khi thay đổi R (hay $U_{LR} \notin R$) thì phải thỏa mãn điều kiện: $Z_C = 2Z_L$, từ đó ta tính được f, hoặc L, C thỏa mãn.

Xét tương tự đối với U_{RC}:

$$U_{RC} = I.Z_{RC} = \frac{U}{\sqrt{R^2+(Z_L-Z_C)^2}}.\sqrt{R^2+Z_C^2} = \frac{U}{\sqrt{\dfrac{R^2+(Z_L-Z_C)^2}{R^2+Z_C^2}}} = \frac{U}{\sqrt{1+\dfrac{Z_L(Z_L-2Z_C)}{R^2+Z_C^2}}}$$

U_{RC} không thay đổi khi thay đổi R (hay $U_{RC} \notin R$) thì phải thỏa mãn điều kiện: $Z_L = 2Z_C$, từ đó ta tính được f, hoặc L, C thỏa mãn.

- ***Trường hợp cuộn dây có điện trở.***

○ ***Xác định R để công suất $\mathscr{P}_{max}$. Tính giá trị cực đại đó.***

+ Khi L,C, ω không đổi thì mối liên hệ giữa Z_L và Z_C không thay đổi nên sự thay đổi của R **không** gây ra **hiện tượng cộng hưởng**

Ta có $\mathscr{P} = (R+r)I^2 = (R+r)\dfrac{U^2}{(R+r)^2+(Z_L-Z_c)^2} = \dfrac{U^2}{(R+r)+\dfrac{(Z_L-Z_C)^2}{(R+r)}}$.

Để $\mathscr{P} = \mathscr{P}_{max}$ => $\left(R+r+\dfrac{(Z_L-Z_C)^2}{R+r}\right)_{min}$ thì: $R+r = \dfrac{(Z_L-Z_C)^2}{R+r} \Rightarrow R+r = |Z_L-Z_C|$

Công suất tiêu thụ cực đại trên toàn mạch (R + r): $\mathscr{P}_{max} = \dfrac{U^2}{2(R+r)} = \dfrac{U^2}{2|Z_L-Z_C|}$

○ ***Xác định R để công suất $\mathscr{P}_{Rmax}$. Tính giá trị cực đại đó.***

Ta có $\mathscr{P}_R = R.I^2 = R.\dfrac{U^2}{(R+r)^2+(Z_L-Z_c)^2} = \dfrac{U^2}{R+2r+\dfrac{r^2+(Z_L-Z_C)^2}{R}}$.

Để $\mathscr{P}_R = \mathscr{P}_{Rmax}$ khi $\left(R+2r+\dfrac{r^2+(Z_L-Z_C)^2}{R}\right)_{min} \rightarrow R = \dfrac{r^2+(Z_L-Z_C)^2}{R} \Rightarrow R^2 = r^2+(Z_L-Z_C)^2$

Công suất tiêu thụ cực đại trên điện trở R: $\mathscr{P}_{Rmax} = \dfrac{U^2}{2(R+r)} = \dfrac{U^2}{2r+2\sqrt{r^2+(Z_L-Z_C)^2}}$

- ***Cho R = R_1, R = R_2 thì $\mathscr{P}$ như nhau.***

○ ***Xác định các giá trị của R_1 hoặc R_2 tương ứng nếu cho $\mathscr{P}$.***

Từ công thức tính công suất: $\mathscr{P} = R.I^2 = \dfrac{R.U^2}{R^2+(Z_L-Z_C)^2} \Rightarrow R^2 - \dfrac{U^2}{\mathscr{P}}R + (Z_L-Z_C)^2 = 0$.

Giải phương trình trên theo R ta thu được hai giá trị R cần tìm chính là hai nghiệm của phương trình ***R_1 , R_2.***

Xác định giá trị của $\mathscr{P}$ $\quad \mathscr{P} = \dfrac{U^2}{R_1+R_2}$.

- ***Xác định R để $\mathscr{P}$ cực đại nếu đề cho R_1 và R_2.***

- Khi $R = R_1$: $\mathscr{P}_1 = R_1.I^2 = \dfrac{R_1.U^2}{R_1^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \dfrac{U^2}{R_1 + \dfrac{(Z_L - Z_C)^2}{R_1}}$
- Khi $R = R_2$: $\mathscr{P}_2 = R_2.I^2 = \dfrac{R_2.U^2}{R_2^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \dfrac{U^2}{R_2 + \dfrac{(Z_L - Z_C)^2}{R_2}}$
- $\mathscr{P}$ như nhau khi:

$$\mathscr{P}_1 = \mathscr{P}_2 \Leftrightarrow \frac{U^2}{R_1 + \dfrac{(Z_L - Z_C)^2}{R_1}} = \frac{U^2}{R_2 + \dfrac{(Z_L - Z_C)^2}{R_2}} \Rightarrow R_1 + \frac{(Z_L - Z_C)^2}{R_1} = R_2 + \frac{(Z_L - Z_C)^2}{R_2}$$

$$\Rightarrow R_1 - R_2 = \frac{(Z_L - Z_C)^2}{R_2} - \frac{(Z_L - Z_C)^2}{R_1} = \frac{(Z_L - Z_C)^2.(R_1 - R_2)}{R_1R_2} \Rightarrow R_1R_2 = (Z_L - Z_C)^2$$

Điều kiện để $\mathscr{P}$ đạt giá trị cực đại: $R = |Z_L - Z_C| \Rightarrow R^2 = (Z_L - Z_C)^2 = R_1R_2$ hay $R = \sqrt{R_1R_2}$

- ***Xác định R_2 khi đề cho biết R_1, Z_L, Z_C :*** Phương pháp giải tương tự bài trên với chú ý rằng $R_1R_2 = (Z_L - Z_C)^2$ → từ đó ta có thể tìm được giá trị thỏa mãn.

Chủ đề 4: Bài toán cho L thay đổi.

- ***Xác định L để $\mathscr{P}_{max}$, I_{max}, U_{Cmax}, U_{Rmax}.***
  - Khi thay đổi L, các đại lượng C, R không thay đổi nên tương ứng các đại lượng $\mathscr{P}_{max}$, I_{max}, U_{Cmax}, U_{Rmax} khi xảy ra cộng hưởng: $Z_L = Z_C$ hay $\omega L = \dfrac{1}{C\omega} \Leftrightarrow LC\omega^2 = 1 \Rightarrow L$
- ***Xác định L để U_{Lmax}. Tính U_{Lmax} đó.***
  - Ta có: $U_L = I.Z_L = \dfrac{Z_L.U}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}} = \dfrac{U}{\sqrt{\dfrac{R^2 + Z_C^2}{Z_L^2} - \dfrac{2.Z_C}{Z_L} + 1}} = \dfrac{U}{\sqrt{y}}$
  - Để U_{Lmax} thì y_{min}.
  - Dùng công cụ đạo hàm khảo sát trực tiếp hàm số:

$$y = \frac{R^2 + Z_C^2}{Z_L^2} - \frac{2.Z_C}{Z_L} + 1 = (R^2 + Z_C^2).\frac{1}{Z_L^2} - 2Z_C.\frac{1}{Z_L} + 1$$

  - U_{Lmax} khi y_{min} hay $Z_L = \dfrac{R^2 + Z_C^2}{Z_C}$ và $U_{Lmax} = \dfrac{U.\sqrt{R^2 + Z_C^2}}{R}$
  - Chú ý rằng khi đó **u_{RC} vuông pha với u_{AB}**.

- Xác định L để U_{RLmax}. Tính U_{RLmax} **[*Lưu ý:* R và L mắc liên tiếp nhau]**

- Ta có: $U_{RL} = I.Z_{RL} = \dfrac{Z_{RL}.U}{\sqrt{R^2+(Z_L-Z_C)^2}} = \dfrac{U}{\sqrt{\dfrac{R^2+(Z_L-Z_C)^2}{R^2+Z_L^2}}} = \dfrac{U}{\sqrt{1+\dfrac{Z_C^2-2Z_L.Z_C}{R^2+Z_L^2}}} = \dfrac{U}{\sqrt{y}}$
- Để U_{RLmax} thì y_{min}.
- Dùng công cụ đạo hàm khảo sát trực tiếp hàm số: $y = 1+\dfrac{Z_C^2-2Z_L.Z_C}{R^2+Z_L^2} = 1+\dfrac{Z_C^2-2Z_C.x}{R^2+x^2}$

$$\Rightarrow y' = \frac{(R^2+x^2).(-2Z_C)-(Z_C^2-2Z_C.x).2x}{(R^2+x^2)^2} = \frac{2Z_C.x^2-2Z_C^2.x-2Z_CR^2}{(R^2+x^2)^2}$$

- U_{RLmax} khi y_{min} hay $x = Z_L = \dfrac{Z_C+\sqrt{4R^2+Z_C^2}}{2}$.

  Thay x vào biểu thức tính y: $y_{min} = \dfrac{4R^2}{4R^2+2Z_C^2+2Z_C\sqrt{Z_C^2+4R^2}} = \dfrac{4R^2}{\left(\sqrt{Z_C^2+4R^2}+Z_C\right)^2}$

và từ đó ta tính được $U_{RLMax} = \dfrac{2UR}{\sqrt{4R^2+Z_C^2}-Z_C} = \dfrac{U\left(\sqrt{4R^2+Z_C^2}+Z_C\right)}{2R} = \dfrac{U}{R}Z_L = \dfrac{RU}{Z_L-Z_C}$

- ***Cho $L = L_1$, $L = L_2$ thì $\mathscr{P}$ như nhau. Tính L để $\mathscr{P}_{max}$.***
  - Khi $L = L_1$: $\mathscr{P}_1 = R.I_1^2 = \dfrac{R.U^2}{R^2+(Z_{L1}-Z_C)^2}$
  - Khi $L = L_2$: $\mathscr{P}_2 = R.I_2^2 = \dfrac{R.U^2}{R^2+(Z_{L2}-Z_C)^2}$
  - $\mathscr{P}$ như nhau khi: $\mathscr{P}_1 = \mathscr{P}_2 \Leftrightarrow \dfrac{R.U^2}{R^2+(Z_{L1}-Z_C)^2} = \dfrac{R.U^2}{R^2+(Z_{L2}-Z_C)^2} \Leftrightarrow |Z_{L1}-Z_C| = |Z_{L2}-Z_C|$
  - Nếu L_1 khác L_2 ta có thể viết lại phương trình trên: $Z_{L2}-Z_C = Z_C-Z_{L1} \Rightarrow Z_C = \dfrac{Z_{L1}+Z_{L2}}{2}$
  - Điều kiện để $\mathscr{P}$ đạt giá trị cực đại (cộng hưởng) khi: $Z_L = Z_C = \dfrac{Z_{L1}+Z_{L2}}{2}$ và $\mathscr{P}_{max} = \dfrac{U^2}{R}$
- ***Cho $L = L_1$, $L = L_2$ thì U_L như nhau. Tính L để U_{Lmax}.***
  - Khi $L = L_1$: $U_{L1} = Z_{L1}.I_1 = \dfrac{Z_{L1}.U}{\sqrt{R^2+(Z_{L1}-Z_C)^2}} = \dfrac{U}{\sqrt{\dfrac{R^2+(Z_{L1}-Z_C)^2}{Z_{L1}^2}}} = \dfrac{U}{\sqrt{1-\dfrac{2Z_C}{Z_{L1}}+\dfrac{R^2+Z_C^2}{Z_{L1}^2}}}$
  - Khi $L = L_2$: $U_{L2} = Z_{L2}.I_2 = \dfrac{Z_{L2}.U}{\sqrt{R^2+(Z_{L2}-Z_C)^2}} = \dfrac{U}{\sqrt{\dfrac{R^2+(Z_{L2}-Z_C)^2}{Z_{L2}^2}}} = \dfrac{U}{\sqrt{1-\dfrac{2Z_C}{Z_{L2}}+\dfrac{R^2+Z_C^2}{Z_{L2}^2}}}$
  - U_L như nhau khi:

    $$1-\frac{2Z_C}{Z_{L1}}+\frac{R^2+Z_C^2}{Z_{L1}^2} = 1-\frac{2Z_C}{Z_{L2}}+\frac{R^2+Z_C^2}{Z_{L2}^2} \Leftrightarrow 2Z_C\left(\frac{1}{Z_{L2}}-\frac{1}{Z_{L1}}\right) = (R^2+Z_C^2)\left(\frac{1}{Z_{L2}^2}-\frac{1}{Z_{L1}^2}\right)$$

    $$\Rightarrow \frac{Z_C}{R^2+Z_C^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Z_{L1}}+\frac{1}{Z_{L2}}\right)$$
  - U_L đạt giá trị cực đại khi: $Z_L = \dfrac{R^2+Z_C^2}{Z_C} \Rightarrow \dfrac{1}{Z_L} = \dfrac{Z_C}{R^2+Z_C^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{Z_{L1}}+\dfrac{1}{Z_{L2}}\right)$

Chủ đề 5: Bài toán cho C thay đổi.

- ***Xác định C để $\mathscr{P}_{max}$, I_{max}, U_{Lmax}, U_{Rmax}***
  - Khi thay đổi C, các đại lượng L, R không thay đổi nên tương ứng các đại lượng $\mathscr{P}_{max}$, I_{max}, U_{Lmax}, U_{Rmax} khi xảy ra cộng hưởng: $Z_L = Z_C$ hay $\omega L = \frac{1}{C\omega} \Leftrightarrow LC\omega^2 = 1 \Rightarrow C$.
- ***Xác định C để U_{Cmax}. Tính U_{Cmax} đó***
  - Ta có: $U_C = I.Z_C = \frac{Z_C.U}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}} = \frac{U}{\sqrt{\frac{R^2 + Z_L^2}{Z_C^2} - \frac{2.Z_L}{Z_C} + 1}} = \frac{U}{\sqrt{y}}$
  - Để U_{Cmax} thì y_{min}.
  - Dùng công cụ đạo hàm khảo sát trực tiếp hàm số:

$$y = \frac{R^2 + Z_L^2}{Z_C^2} - \frac{2.Z_L}{Z_C} + 1 = \left(R^2 + Z_L^2\right).\frac{1}{Z_C^2} - 2Z_L.\frac{1}{Z_C} + 1$$

  - U_{Cmax} khi y_{min} hay $Z_C = \frac{R^2 + Z_L^2}{Z_L}$ và $U_{Cmax} = \frac{U.\sqrt{R^2 + Z_L^2}}{R}$
  - **Khi đó u_{RL} vuông pha với u_{AB}.**

- ***Xác định C để U_{RCmax}. Tính U_{RCmax}*** **[Lưu ý R, C mắc liên tiếp nhau.]**
  - Ta có: $U_{RC} = I.Z_{RC} = \frac{Z_{RC}.U}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}} = \frac{U}{\sqrt{\frac{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}{R^2 + Z_C^2}}} = \frac{U}{\sqrt{1 + \frac{Z_L^2 - 2Z_L.Z_C}{R^2 + Z_C^2}}} = \frac{U}{\sqrt{y}}$
  - Để U_{RCmax} thì y_{min}.
  - Dùng công cụ đạo hàm khảo sát trực tiếp hàm số:

$$y = 1 + \frac{Z_L^2 - 2Z_L.Z_C}{R^2 + Z_C^2} = 1 + \frac{Z_L^2 - 2Z_L.x}{R^2 + x^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\left(R^2 + x^2\right).\left(-2Z_L\right) - \left(Z_L^2 - 2Z_L.x\right).2x}{\left(R^2 + x^2\right)^2} = \frac{2Z_L.x^2 - 2Z_L^2.x - 2Z_L R^2}{\left(R^2 + x^2\right)^2}$$

  - U_{RCmax} khi y_{min} hay $x = Z_C = \frac{Z_L + \sqrt{Z_L^2 + 4R^2}}{2}$ và từ đó ta tính được U_{RCmax} tương ứng

$$U_{RCmax} = \frac{U\left(\sqrt{4R^2 + Z_L^2} + Z_L\right)}{2R} = \frac{2UR}{\sqrt{4R^2 + Z_L^2} - Z_L} = \frac{U}{R}.Z_C = \frac{RU}{Z_C - Z_L}.$$

- ***Cho $C = C_1$, $C = C_2$ thì $\mathscr{P}$ như nhau. Tính C để $\mathscr{P}_{max}$.***
  - Khi $C = C_1$: $\mathscr{P}_1 = R.I_1^2 = \frac{R.U^2}{R^2 + (Z_L - Z_{C1})^2}$
  - Khi $C = C_2$: $\mathscr{P}_2 = R.I_2^2 = \frac{R.U^2}{R^2 + \left(Z_L - Z_{C2}\right)^2}$
  - $\mathscr{P}$ như nhau khi: $\mathscr{P}_1 = \mathscr{P}_2 \Leftrightarrow |Z_L - Z_{C1}| = |Z_L - Z_{C2}|$
  - Nếu C_1 khác C_2 ta có thể viết lại phương trình trên: $Z_L - Z_{C1} = Z_{C2} - Z_L \Rightarrow Z_L = \frac{Z_{C1} + Z_{C2}}{2}$
  - Điều kiện để $\mathscr{P}$ đạt giá trị cực đại (cộng hưởng) khi: $Z_C = Z_L = \frac{Z_{C1} + Z_{C2}}{2}$ và $\mathscr{P}_{max} = \frac{U^2}{R}$

- ***Cho $C = C_1$, $C = C_2$ thì U_C như nhau. Tính C để U_{Cmax}.***
  - Khi $C = C_1$: $U_{C1} = Z_{C1}.I_1 = \dfrac{Z_{C1}.U}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_{C1})^2}} = \dfrac{U}{\sqrt{1 - \dfrac{2Z_L}{Z_{C1}} + \dfrac{R^2 + Z_L^2}{Z_{C1}^2}}}$
  - Khi $C = C_2$: $U_{C2} = Z_{C2}.I_1 = \dfrac{Z_{C2}.U}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_{C2})^2}} = \dfrac{U}{\sqrt{1 - \dfrac{2Z_L}{Z_{C2}} + \dfrac{R^2 + Z_L^2}{Z_{C2}^2}}}$
  - U_C như nhau khi:

$$1 - \frac{2Z_L}{Z_{C1}} + \frac{R^2 + Z_L^2}{Z_{C1}^2} = 1 - \frac{2Z_L}{Z_{C2}} + \frac{R^2 + Z_L^2}{Z_{C2}^2} \Leftrightarrow 2Z_L\left(\frac{1}{Z_{C2}} - \frac{1}{Z_{C1}}\right) = \left(R^2 + Z_L^2\right)\left(\frac{1}{Z_{C2}^2} - \frac{1}{Z_{C1}^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{Z_L}{R^2 + Z_L^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Z_{C1}} + \frac{1}{Z_{C2}}\right)$$

  - U_C đạt giá trị cực đại khi: $Z_C = \dfrac{R^2 + Z_L^2}{Z_L} \Rightarrow \dfrac{1}{Z_C} = \dfrac{Z_L}{R^2 + Z_L^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{Z_{C1}} + \dfrac{1}{Z_{C2}}\right)$

Chủ đề 6: Bài toán cho ω thay đổi.

- ***Xác định ω để $\mathscr{P}_{max}$, I_{max}, U_{Rmax}.***
  - Khi thay đổi ω, các đại lượng L, C, R không thay đổi nên tương ứng các đại lượng $\mathscr{P}_{max}$, I_{max}, U_{Rmax} khi xảy ra cộng hưởng: $Z_L = Z_C$ hay $\omega L = \dfrac{1}{C\omega} \Leftrightarrow LC\omega^2 = 1 \Rightarrow \omega$.
- ***Xác định ω để U_{Cmax}. Tính U_{Cmax} đó.***
  - $U_C = Z_C.I = \dfrac{Z_C.U}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}} = \dfrac{U}{\sqrt{\dfrac{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}{Z_C^2}}} = \dfrac{U}{\sqrt{\dfrac{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}{\dfrac{1}{\omega^2 C^2}}}}$

$$= \frac{U}{\sqrt{\omega^4 L^2 C^2 + \omega^2\left(R^2 C^2 - 2LC\right) + 1}} = \frac{U}{\sqrt{x^2 L^2 C^2 + x\left(R^2 C^2 - 2LC\right) + 1}} = \frac{U}{\sqrt{y}}$$

  - U_{Cmax} khi y_{min} hay $x = \omega_C^2 = \dfrac{2LC - R^2C^2}{2L^2C^2} = \dfrac{1}{L^2}\left(\dfrac{L}{C} - \dfrac{R^2}{2}\right) \Rightarrow \omega_C = \dfrac{1}{L}\sqrt{\dfrac{L}{C} - \dfrac{R^2}{2}}$

    và từ đó ta tính được $U_{Cmax} = \dfrac{2LU}{R\sqrt{4LC - R^2C^2}}$.

- ***Xác định ω để U_{Lmax}. Tính U_{Lmax} đó.***
  - $U_L = Z_L.I = \dfrac{Z_L.U}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}} = \dfrac{U}{\sqrt{\dfrac{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}{Z_L^2}}} = \dfrac{U}{\sqrt{\dfrac{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}{\omega^2 L^2}}}$

$$= \frac{U}{\sqrt{\dfrac{1}{\omega^4 L^2 C^2} + \dfrac{1}{\omega^2}\left(\dfrac{R^2}{L^2} - \dfrac{2}{LC}\right) + 1}} = \frac{U}{\sqrt{x^2\dfrac{1}{L^2C^2} + x\left(\dfrac{R^2}{L^2} - \dfrac{2}{LC}\right) + 1}} = \frac{U}{\sqrt{y}}$$

  - U_{Lmax} khi y_{min} hay $x = \dfrac{1}{\omega_L^2} = \dfrac{L^2C^2}{2}\left(\dfrac{2}{LC} - \dfrac{R^2}{L^2}\right) = C^2\left(\dfrac{L}{C} - \dfrac{R^2}{2}\right) \Rightarrow \omega_L = \dfrac{1}{C}.\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{L}{C} - \dfrac{R^2}{2}}}$

    và từ đó ta tính được $U_{Lmax} = \dfrac{2LU}{R\sqrt{4LC - R^2C^2}}$.

- ***Cho $\omega = \omega_1$, $\omega = \omega_2$ thì $\mathscr{P}$ như nhau. Tính ω để $\mathscr{P}_{max}$.***
  - Khi $\omega = \omega_1$: $\mathscr{P}_1 = R.I_1^2 = \dfrac{R.U^2}{R^2 + (Z_{L1} - Z_{C1})^2} = \dfrac{R.U^2}{R^2 + \left(\omega_1 L - \dfrac{1}{\omega_1 C}\right)^2}$
  - Khi $\omega = \omega_2$: $\mathscr{P}_2 = R.I_2^2 = \dfrac{R.U^2}{R^2 + \left(Z_{L2} - Z_{C2}\right)^2} = \dfrac{R.U^2}{R^2 + \left(\omega_2 L - \dfrac{1}{\omega_2 C}\right)^2}$
  - $\mathscr{P}$ như nhau khi:
  $$\mathscr{P}_1 = \mathscr{P}_2 \Leftrightarrow \omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} = \frac{1}{\omega_2 C} - \omega_2 L \Rightarrow (\omega_1 + \omega_2)L = \frac{1}{C}\left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}\right) \Rightarrow \omega_1\omega_2 = \frac{1}{LC}$$
  - Điều kiện để $\mathscr{P}$ đạt giá trị cực đại (cộng hưởng) khi:
  $$Z_C = Z_L \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC} = \omega_1\omega_2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\omega_1\omega_2}$$

- ***Cho $\omega = \omega_1$, $\omega = \omega_2$ thì U_C như nhau. Tính ω để U_{Cmax}.***
  - Khi $\omega = \omega_1$: $U_{C1} = Z_{C1}.I_1 = \dfrac{U}{\omega_1 C\sqrt{R^2 + \left(\omega_1 L - \dfrac{1}{\omega_1 C}\right)^2}} = \dfrac{U}{\sqrt{\omega_1^2 C^2 R^2 + \left(\omega_1^2 LC - 1\right)^2}}$
  - Khi $\omega = \omega_2$: $U_{C2} = Z_{C2}.I_2 = \dfrac{U}{\omega_2 C\sqrt{R^2 + \left(\omega_2 L - \dfrac{1}{\omega_2 C}\right)^2}} = \dfrac{U}{\sqrt{\omega_2^2 C^2 R^2 + \left(\omega_2^2 LC - 1\right)^2}}$
  - U_C như nhau khi:
  $$U_{C1} = U_{C2} \Leftrightarrow \omega_1^2 C^2 R^2 + \left(\omega_1^2 LC - 1\right)^2 = \omega_2^2 C^2 R^2 + \left(\omega_2^2 LC - 1\right)^2$$
  $$\Rightarrow C^2R^2\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right) = LC\left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right)\left[LC\left(\omega_2^2 + \omega_1^2\right) - 2\right] \Rightarrow C^2R^2 = -2L^2C^2\left[\frac{1}{2}\left(\omega_2^2 + \omega_1^2\right) - \frac{1}{LC}\right]$$
  $$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\omega_2^2 + \omega_1^2\right) = \frac{1}{L^2}\left(\frac{L}{C} - \frac{R^2}{2}\right)$$
  - Điều kiện để U_{Cmax} khi: $\omega_C^2 = \dfrac{1}{L^2}\left(\dfrac{L}{C} - \dfrac{R^2}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right)$

- ***Cho $\omega = \omega_1$, $\omega = \omega_2$ thì U_L như nhau. Tính ω để U_{Lmax}.***
  - Khi $\omega = \omega_1$: $U_{L1} = Z_{L1}.I_1 = \dfrac{U}{\dfrac{1}{\omega_1 L}\sqrt{R^2 + \left(\omega_1 L - \dfrac{1}{\omega_1 C}\right)^2}} = \dfrac{U}{\sqrt{\dfrac{R^2}{\omega_1^2 L^2} + \left(1 - \dfrac{1}{\omega_1^2 LC}\right)^2}}$
  - Khi $\omega = \omega_2$: $U_{L2} = Z_{L2}.I_2 = \dfrac{U}{\dfrac{1}{\omega_2 L}\sqrt{R^2 + \left(\omega_2 L - \dfrac{1}{\omega_2 C}\right)^2}} = \dfrac{U}{\sqrt{\dfrac{R^2}{\omega_2^2 L^2} + \left(1 - \dfrac{1}{\omega_2^2 LC}\right)^2}}$
  - U_L như nhau khi:
  $$U_{L1} = U_{L2} \Leftrightarrow \frac{R^2}{\omega_1^2 L^2} + \left(1 - \frac{1}{\omega_1^2 LC}\right)^2 = \frac{R^2}{\omega_2^2 L^2} + \left(1 - \frac{1}{\omega_2^2 LC}\right)^2$$
  $$\Rightarrow \frac{R^2}{L^2}\left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2}\right) = \frac{1}{LC}\left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2}\right)\left[2 - \frac{1}{LC}\left(\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2}\right)\right]$$
  $$\Rightarrow \frac{R^2}{L^2} = \frac{2}{L^2C^2}\left[LC - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2}\right)\right] \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2}\right) = LC - \frac{R^2C^2}{2} = C^2\left(\frac{L}{C} - \frac{R^2}{2}\right)$$
  - Điều kiện để U_{Lmax} khi: $\dfrac{1}{\omega_L^2} = C^2\left(\dfrac{L}{C} - \dfrac{R^2}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\omega_1^2} + \dfrac{1}{\omega_2^2}\right)$

- ***Cho $\omega = \omega_1$ thì U_{Lmax}, $\omega = \omega_2$ thì U_{Cmax}. Tính ω để $\mathscr{P}_{max}$.***
    - U_{Lmax} khi $\omega_1 = \frac{1}{C}.\frac{1}{\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{R^2}{2}}}$
    - U_{Cmax} khi $\omega_2 = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{R^2}{2}}$
    - Điều kiện để $\mathscr{P}$ đạt giá trị cực đại (cộng hưởng) khi:

$$Z_C = Z_L \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC} = \omega_1\omega_2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\omega_1\omega_2}$$